

Recursiveité

Pour faire ce TP on Python Tutor et prendra soin du bien simuler le code.

1 Fonctions...

Comme pour les suites récurrentes, on appelle cas initiaux les cas pour lesquelles le calcul de la fonction ne nécessite pas de calculer une autre valeur de la fonction.

Pour les trois fonctions ci-dessous :

1. Calculer à la main de petites valeurs en utilisant la définition donnée ($A(2, 2)$, $f(68)$ et $\binom{4}{2}$).
2. Essayer de déterminer les cas initiaux en fonction des paramètres par une formule sans les calculer.
3. Imaginer une solution itérative
4. Écrire et simuler une solution récursive.

Exercice 1. Fonction d'Ackermann

La fonction d'Ackermann est une fonction à deux paramètres définie par récurrence comme ceci :

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0. \end{cases}$$

Exercice 2. Fonction 91 de McCarthy

La fonction de McCarthy est une fonction définie par récurrence comme ceci :

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ f(f(n + 11)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. Binôme de Newton

On utilisera **exclusivement** la définition du binôme par la formule de récurrence du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ 1 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2 Fonction récursives

Exercice 4. Suite récurrente simple

On définit $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Écrire une fonction récursive qui prend en entrée un entier $n \geq 0$ et calcule la valeur de u_n .

Exercice 5. Suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie par récurrence :

$$S_{n+1} = \begin{cases} \frac{S_n}{2} & \text{si } S_n \text{ est pair,} \\ 3S_n + 1 & \text{si } S_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Écrire une fonction récursive qui prend en entrée un entier $s \geq 1$ et calcule le premier entier $n \geq 0$ tel que $S_n = 1$.

Exercice 6. Maximum

Écrire une fonction récursive qui prend en entrée une liste L d'entiers positifs et calcule le maximum de la liste. Le maximum sera -1 si la liste est vide.

Exercice 7. Somme

Écrire une fonction récursive qui prend en entrée une liste L d'entiers et calcule la somme des éléments de la liste.

Exercice 8. Dichotozero

Écrire une fonction récursive qui implémente l'algorithme de recherche de zéro par dichotomie.

Exercice 9. Exponentiation rapide

Écrire une fonction récursive qui implémente l'algorithme d'exponentiation rapide.