Mémoïsation

1 Mots de taille n

On considère dans cette partie les entiers naturels écrits en binaires sur n bits. L'objectif est de déterminer combien de mots ne contiennent pas deux 0 consécutifs dans leur écriture.

On formalise le problème algorithmique pour tout entrée $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = |\{0 \leq k < 2^n, \, k \text{ ne possède pas 2 zéros consécutif dans sont écriture en binaire}\}|$$

Exercice 1. *Étude théorique du problème*

1. Décrivez une solution pour calculer P_n en utilisant une recherche exhaustive de solutions. Quelle est la complexité de cette solution ?
2. Quel est le type de problème algorithmique à résoudre ?
3. Exprimez P_1, P_2 et P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2} pour $n \geq 3$
4. Décrivez une solution pour calculer P_n en utilisant une approche descendante.
   (a) Quelle est la complexité sans utiliser de technique de mémoïsation ?
   (b) Quelle est la complexité en utilisant une technique de mémoïsation ?

Exercice 2. *Implémentation de solution*

1. Implémenter une fonction `nb_c` qui prend en entrée un entier positif n et renvoie P_n en utilisant une approche par sous-problème descendante. Vous utiliserez une technique de mémoïsation, et choisirez la structure la plus petite et la plus efficace pour stocker les sous-problèmes calculés.

2 Somme de sous-ensembles

On considère dans cette partie une liste d'entiers positifs `l` et un entier `k`. L'objectif est de déterminer si il existe une liste extraite de `l` (sous-ensemble d'éléments de `l`) dont la somme vaut `k`.

On formalise le problème algorithmique pour tout liste d'entiers positifs l et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$P_k(l) = \exists l' \subseteq l, \texttt{sum}(l') = k$$

Exercice 3. *Étude théorique du problème*

1. Décrivez une solution pour calculer $P_k(l)$ en utilisant une recherche exhaustive de solutions. Quelle est la complexité de cette solution ?
2. Quel est le type de problème algorithmique à résoudre ?

3. Exprimez $P_0(l)$, $P_k(l)$ pour $k < 0$ et $P_k([])$.
4. Pour l non vide, exprimez $P_k(l)$ en fonction de $l[0]$, $l[1:]$ et k.

Exercice 4. *Implémentation Descendante*

Implémenter une fonction `subset_sum_desc` qui prend en entrée une liste d'entiers positifs et un entier k et renvoie $P_k(l)$ en utilisant une approche par sous-problème descendante. Sans utiliser de technique de mémoïsation.

Quelle est la complexité de votre fonction ?

Exercice 5. *Implémentation Descendante avec Mémoïsation par Dictionnaire*

Implémenter une fonction `subset_sum_dict` qui prend en entrée une liste d'entiers positifs et un entier k et renvoie $P_k(l)$ en utilisant une approche par sous-problème descendante. Vous utiliser un dictionnaire pour mémoïser les résultats des sous-problèmes.

Quelle est la complexité de votre fonction ?

Exercice 6. *Implémentation Montante*

Determinez, à k fixé quels sont les sous-problème intervenant dans la résolution du problème $P_k(l)$, l prenant toutes les listes d'entiers possibles.

Implémenter une fonction `subset_sum_mot` qui prend en entrée une liste d'entiers positifs et un entier k et renvoie $P_k(l)$ en utilisant une approche par sous-problème montante.

Prouvez la terminaison et la correction de votre fonction.

On utilisera les matrices `numpy` dont voici un exemple d'utilisation. On considère le module `numpy` importé avec pour alias `np`.

```
matrice = np.full((n,m), True) # Création de matrice n x m remplie de True
matrice[i][j] = False # Modification
x = matrice[i][j] # Accès
```

Exercice 7. *Implémentation Descendante avec Mémoïsation par Matrices*

Implémenter une fonction `subset_sum_mat` qui prend en entrée une liste d'entiers positifs et un entier k et renvoie $P_k(l)$ en utilisant une approche par sous-problème descendante. Vous utiliser une matrice pour mémoïser les résultats des sous-problèmes.

3 Analyse des performances

On veux mesurer les performances des différentes fonctions `subset_sum` au pire cas en fonction de leur implémentation. Le pire cas est atteint lorsqu'il n'existe pas de liste extraite dont la somme est k.

Exercice 8. *Génération de jeux de test*

Implémenter une fonction `rand_subset_sum_dict` qui prend en entrée un entier `n`, génère une liste de `n` nombres aléatoires entre 0 et 99 inclus, et lance la fonction `subset_sum_dict` sur la liste de taille n générée et `k = 100*n`.

On utilisera le module `random` dont voici un exemple d'utilisation.

```
n = random.randint(3,12) # génère un entier entre 3 et 12 inclus.
```

Exercice 9. *Temps d'exécution moyen*

Implémenter une fonction `timing_subset_sum_dict` qui prend en entrée un entier `n` et mesure la moyenne des temps d'exécution de la fonction `rand_subset_sum_dict` appelée sur l'entrée `n` 20 fois.

Pour calculer le temps d'exécution, on utilisera le module `time`. Chaque processus possède son horloge, indiquant le temps consacré par le CPU à son exécution. La performance d'un morceau de code peut être calculé en faisant la différences de la valeur d'horloge avant et après l'exécution du morceau de code en question.

Exercice 10. *Courbes*

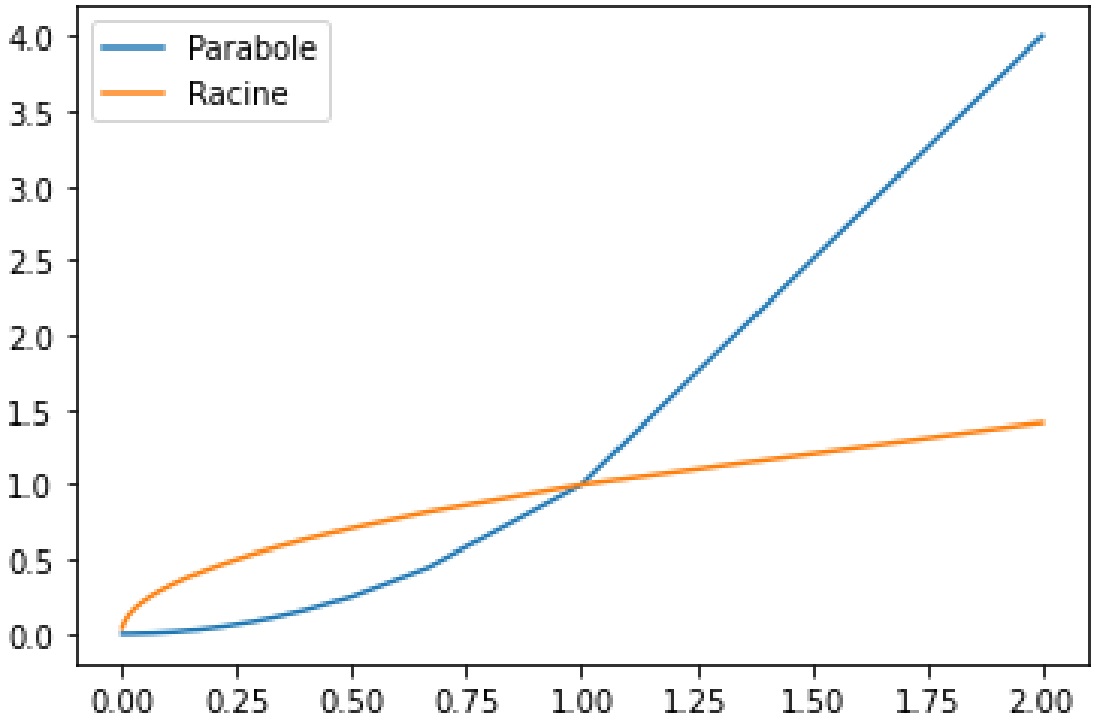
Créer une liste `courbe_subset_sum_dict` de taille 100 qui contient à l'indice `i` la valeur de la fonction `timing_subset_sum_dict(i)`.

Exercice 11. *Tracé*

Utiliser le module `matplotlib` pour tracer la courbe obtenue. Puis avec une méthode analogue ajoutez au tracé les courbes de performances des fonctions `subset_sum_mat`, `subset_sum_mont` et `subset_sum_desc`. Pour cette dernière on veillera à faire le tracé uniquement pour des valeurs de `n` faibles ($n \leq 7$).

```
import matplotlib.pyplot as plt

x = [ 2 / t for t in range(1,1200)] # Valeurs en absisses
y = [ t**2 for t in x ]
z = [ t**(0.5) for t in x ]
plt.plot(x,y, label="Parabole")
plt.plot(x,z, label="Racine")
plt.legend()
plt.show()
```


Parabole
Racine
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00